§3 复变函数的积分

§3.1 复变函数积分的定义及计算法

一、复积分的定义

1、定义

Def. 设 C 是 z 平面上一条光滑或分段光滑的有向曲线段，a, b 是 C 的起终点，$f(z)$ 在 C 上定义，将 C 从 a 到 b 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{z_0z_1}, \cdots, \widehat{z_{n-1}z_n}$，记 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$，任取一点 $\zeta_i \in \widehat{z_{i-1}z_i}$，作乘积 $f(\zeta_i)\Delta z_i$ 并求和 $\sum f(\zeta_i)\Delta z_i$，记 λ 是 n 个小弧段的最大直径，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$ 存在且与分法无关，则称极限值为 $f(z)$ 在 C 上的积分值 $\int_C f(z)dz$，否则称 $f(z)$ 不可积.

Rem. (1) 复积分本质上也是 Riemann 积分，当 $f(z)$ 在 C 上有界且几乎处处连续时可积. 可积函数一定有界.

(2) 若 C 是闭曲线，常记为 $\oint_C f(z)dz$

2. 用定义计算复积分

例1 (1) $\int_C 1dz = b-a$ (2) $\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

这里 a, b 是 C 的起终点

Pf. (1) $f(z)=1$ 连续，任意分法 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta z_i$ 是 $z_n - z_0 = b-a$，令 $\lambda\to 0$，$\int_C 1dz = b-a$

(2) $f(z)=z$ 连续，取 $\zeta_i = z_i$ 或 z_{i-1}，则：

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i + \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1})\Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - z_{i-1}^2 = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2$$

令 $\lambda \to 0$，$\int_C f(z)dz = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

二、复积分的计算法

Thm 1. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑或分段光滑的有向曲线C上连续，则$\int_C f(z)\,dz=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(v\,dx+u\,dy)$.

Pf. 任意给定分法，$\widehat{z_{i-1}z_i}$，$\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$，记$z_i=x_i+iy_i$，则

$\Delta z_i=\Delta x_i+i\Delta y_i$，任取$\zeta_i=\xi_i+i\eta_i\in\widehat{z_{i-1}z_i}$

比较等式两边积分和：

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta z_i=\sum_{i=1}^n[u(\xi_i,\eta_i)+iv(\xi_i,\eta_i)]\cdot[\Delta x_i+i\Delta y_i]$$

$$=\sum_{i=1}^n[u(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i-v(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]+i\sum_{i=1}^n[u(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i+v(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i]$$

令$\lambda\to0$得，$\int_C f(z)\,dz=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(u\,dy+v\,dx)$

Rem. $\int_C f(z)\,dz\ \overset{f(z)=u+iv}{\underset{z=x+iy}{=\!=\!=}}\ \int_C(u+iv)\,d(x+iy)$

Thm 2. 设$f(z)$在C上连续，$C: z=z(t)$，t从α到β，$z'(t)$连续

则$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$

Pf. 记$f(z)=u+iv$，$z(t)=x(t)+iy(t)$

由Thm 1.，$\int_C f(z)\,dz=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(v\,dx+u\,dy)$

$$\overset{x=x(t)}{\underset{y=y(t)}{=\!=\!=}}\int_\alpha^\beta[u\cdot x'(t)-v\cdot y'(t)]\,dt+i\int_\alpha^\beta[v\cdot x'(t)+u\cdot y'(t)]\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta(u+iv)\cdot[x'(t)+iy'(t)]\,dt=\int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

Rem. $\int_C f(z)\,dz\ \overset{z=z(t)}{=\!=\!=}\ \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$

例2 设$C: |z-a|=\rho$取逆时针，则

$$\oint_C\frac{1}{(z-a)^n}\,dz=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq1, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Pf. C的参数方程：$z=a+\rho e^{i\theta}$，θ从0到2π.

$$dz=i\rho e^{i\theta}d\theta$$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^n e^{in\theta}}i\rho e^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i(1-n)\theta}}{\rho^{n-1}}d\theta$$

$$=\begin{cases}2\pi i,\ n=1\\ \frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}\cos(1-n)\theta\, d\theta+i\sin(1-n)\theta d\theta=0,\ n\neq 1,n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

一般地，若C是绕$z=a$的闭曲线取逆时针，则$\oint_C \frac{1}{z-a}dz=2\pi i$,

$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=0\ (n\neq 1)$.

特别地，$\oint_{|z|=\rho}\frac{1}{z}dz=2\pi i$，$\oint_{|z|=\rho}\frac{1}{z^2}dz=0$.

例3 设C是实轴上从$z=0$到$z=2\pi$的直线段，计算$\int_C e^{iz}dz$

Sol. C的参数方程：$z=t$，t从0到2π

$$\int_C e^{iz}dz=\int_0^{2\pi}e^{it}dt=\int_0^{2\pi}(\cos t+i\sin t)dt=0.$$

Rem. 复积分中没有积分中值定理

三、复积分的性质

类似第二类曲线积分：

(1) $\int_C [f(z)\pm g(z)]dz=\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz$

(2) $\int_C kf(z)dz=k\int_C f(z)dz\ (k\in\mathbb{C})$

(3) $\int_C 1dz=\int_C dz=b-a$ (a, b为C的起、终点)

(4) 若$C=C_1+C_2$，则$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$

(5) 记C^{-1}与C方向相反：$\int_{C^{-1}}f(z)dz=-\int_C f(z)dz$

(6) ~~伴随~~ 若 $|f(z)|\le M$，C 的长度为 ℓ，则 $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le M\ell$

例4 计算 $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$，这里 C：(1) 从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线段

(2) 从 $z=0$ 沿正实轴到 $z=1$，再沿 $x=1$ 到 $z=1+i$

Sol. (1) $C: z=(1+i)t$，t 从 0 到 1

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 t(1+i)\,dt = \frac{1+i}{2}$$

(2) $C=C_1+C_2$ $\quad C_1: z=t$，t 从 0 到 1 $\quad C_2: z=1+it$，t 从 0 到 1

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \int_{C_1}+\int_{C_2} = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \cancel{t}\cdot i\,dt = \frac{1}{2}+\cancel{\tfrac{1}{2}}\,i$$

Rem $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$ 与路径有关，$\int_C 1\,dz$，$\int_C z\,dz$ 与路径无关

一般地，$\oint_C f(z)\,dz \xlongequal{f(z)\text{解析}} 0$

事实上有，$\oint_C 1\,dz = 0$，$\oint_C z\,dz = 0$（例1的结果）